



**HAL**  
open science

## Concept de prétopologie temporelle pour l'analyse des évolutions structurelles

Nazha Selmaoui-Folcher, Jannai Tokotoko, Samuel Gorhouna, Laisa Roi

► **To cite this version:**

Nazha Selmaoui-Folcher, Jannai Tokotoko, Samuel Gorhouna, Laisa Roi. Concept de prétopologie temporelle pour l'analyse des évolutions structurelles. 21èmes Journées Francophones Extraction et Gestion des Connaissances, EGC 2021. RNTI-37, pp.119-131, Jan 2021, Montpellier, France. hal-03142388

**HAL Id: hal-03142388**

**<https://hal-unc.archives-ouvertes.fr/hal-03142388>**

Submitted on 16 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Concept de prétopologie temporelle pour l'analyse des évolutions structurelles

Nazha Selmaoui-Folcher\*, Jannai Tokotoko\*  
Samuel Gorohouna\*\*, Laisa ROI \*\*

\*ISEA - Université de la Nouvelle Calédonie  
nazha.selmaoui@univ-nc.nc, tokotokojannai@yahoo.fr  
\*\*LARJE - Université de la Niouvelle Calédonie

**Résumé.** La prétopologie est un modèle mathématique développé par affaiblissement d'une axiomatique de la topologie. Elle a d'abord été utilisée dans les sciences économiques, sociales, physiques et biologiques, puis dans la reconnaissance de formes et l'analyse d'images. Elle permet de travailler dans un cadre mathématique aux propriétés faibles, et la non idempotence de l'opérateur d'adhérence permet d'implémenter des algorithmes itératifs. Il propose un formalisme généralisant les concepts de la théorie des graphes et modélise les problèmes de manière universelle. Dans cet article, nous étendrons ce modèle pour analyser des données complexes avec la dimension temporelle. Nous définissons la notion d'espace prétopologique temporel. Nous donnons un exemple basé sur une relation binaire appelé prétopologie temporelle des descendants d'ordre  $p$ . Nous présentons deux notions de sous-structures temporelles :  $k$ -stable et fermé élémentaire temporel. Nous proposons des algorithmes pour extraire ces sous-structures. Nous expérimentons notre proposition sur 4 jeux de données réelles.

## 1 Introduction

L'analyse structurelle est l'un des domaines qui a permis l'analyse des réseaux sociaux, l'économétrie sectorielle, etc (Lageron et Bonnevey, 2002). Les interactions entre les individus (sommets) sont importantes à étudier, elles sont de différentes natures et concernent des dépendances, des influences ou d'autres relations.

Des scientifiques comme (Auray et al., 1979; Duru, 1980; Emptoz, 1983) ont développé le concept d'espace prétopologique par affaiblissement d'une axiomatique de la topologie. Cela a permis d'étudier les structures topologiques faibles, en particulier les structures discrètes et finies, à l'aide de modèles construits pas à pas (phénomènes de propagation) tels que la diffusion d'informations dans des réseaux complexes. Contrairement à la topologie, la prétopologie est définie par une fonction appelée *adhérence* (pseudo-fermeture) qui n'est pas nécessairement idempotente.

La prétopologie a trouvé ses premières applications dans les sciences sociales et l'économétrie (Auray et al., 1979; Duru, 1980), les réseaux sociaux (Levorato, 2011; Basileu et al., 2012; Dalud-Vincent et al., 2001), la reconnaissance de formes (Emptoz, 1983), l'analyse d'images (Lamure, 1987; Arnaud et al., 1986; Selmaoui et al., 1993), entre autres. Ces dernières années,

les chercheurs ont repris les bases de la prétopologie pour l'appliquer dans de nombreux domaines tels que l'apprentissage machine (Le et al., 2007) ou l'exploration de textes (Cleuziou et al., 2011). Elle a montré son intérêt pour la construction de modèles mathématiques adaptés aux structures d'ensembles d'éléments afin de réaliser des analyses structurelles de données, d'extraire des tendances (clustering) ou de prédire des événements (classification supervisée). Elle propose un formalisme qui généralise les concepts de la théorie des graphes (Dalud-Vincent et al., 2001).

La prétopologie ayant été principalement utilisée pour les données statiques, notre contribution consiste à l'étendre à l'analyse des données spatio-temporelles. Nous établissons un nouveau formalisme du concept de prétopologie temporelle afin de construire un cadre théorique de l'évolution temporelle et structurelle. Nous donnons quelques exemples d'évolution à partir de la fonction d'adhérence (pseudo-fermeture) temporelle. Nous proposons une première étude appliquée à l'évolution des données économiques intersectorielles en formalisant cette dynamique par une séquence d'espaces prétopologiques. Dans la section 2, nous rappellerons les définitions de base du modèle prétopologique, la section 3 présente les premières définitions et formalismes du nouveau concept des espaces prétopologiques temporels. La section 3.1 présente le processus de construction d'un espace prétopologique. Dans la section 4, nous donnons deux exemples d'analyse de sous-structure présentant les évolutions dans le temps. Dans la section 5, nous présentons les résultats de notre modèle appliqué sur 4 jeux de données réelles avec deux ensembles de données économiques. La section 6 présente la conclusion et les perspectives.

## 2 Définitions de bases et formalisme

Notre approche consiste à intégrer une dimension temporelle dans un espace prétopologique. Afin de mieux présenter notre approche, nous rappelons brièvement les définitions et les concepts de base d'un modèle prétopologique. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à (Belmandt, 1993; Bui, 2018).

Considérons un ensemble de population non vide (individus, objets, etc.)  $E$  sur lequel nous définissons un processus d'extension  $a$  associé à un processus dual  $i$ .  $\mathcal{P}(E)$  est l'ensemble des parties de  $E$ . Un tel espace est appelé espace prétopologique décrit par le triplet  $(E, i, a)$  où  $a$  et  $i$  sont des opérateurs c-dual appelés *adhérence* (c'est-à-dire le processus d'extension) et *intérieur* (processus dual), respectivement.

**Définition 2.1 (Espace prétopologique et adhérence)**  $(E, a, i)$  est un espace prétopologique si et seulement si  $i$  et  $a$  sont des opérateurs c-duaux de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E)$  :

- $\forall A \in \mathcal{P}(A), i(A) = (a(A^c))^c$  où  $A^c$  est le complémentaire de  $A$
- $a(\emptyset) = \emptyset$
- $\forall A \in \mathcal{P}(A), A \subset a(A)$

L'adhérence (pseudo-fermeture)  $a$  n'est pas nécessairement idempotente comme pour un espace topologique ( $a(a(A)) \neq a(A)$ ), c'est-à-dire nous avons :  $A \subset a(A) \subset a[a(A)] \subset \dots$

Cette propriété de non-idempotence permet de construire des opérateurs itératifs et donc des algorithmes itératifs. Les opérateurs étant duaux, souvent on ne définit que l'adhérence  $a$ .

**Définition 2.2 (Sous-ensemble fermé)**  $A \in \mathcal{P}(E)$  est un sous-ensemble fermé de  $E$  si et seulement si  $a(A) = A$ .

**Définition 2.3 (Fermeture)**  $A \in \mathcal{P}(E)$ , la fermeture de  $A$  dans  $(E, a)$  est le plus petit sous-ensemble fermé noté  $F(A)$  tel que  $A \subset F(A)$ , et  $\exists p \geq 1$  tel que  $F(A) = a^{p+1}(A) = a^p(A)$ .

**Définition 2.4 (Sous-ensemble fermé élémentaire)**  $\forall x \in E$ , un sous-ensemble fermé élémentaire de  $x$  noté  $F(x)$  est le fermé de  $\{x\}$ , i.e.  $\exists p \geq 1$ , tel que  $F(x) = a^{p+1}(\{x\}) = a^p(\{x\})$ .

Soit  $x \in E$  et  $A$  est un sous-ensemble de  $E$ .  $a(\{x\})$  représente l'ensemble des éléments liés à  $x$ . Dans ce cas  $a(A)$  exprimera l'ensemble des éléments en relation avec les éléments de  $A$ . L'exemple simple qui est souvent utilisé est la relation de voisinage. Cela permet de donner un sens aux éléments voisins de  $x$  et d'étendre cette relation de voisinage à  $A$ . Cette notion généralise la notion de voisinage que l'on retrouve dans un espace topologique mais qui est affaiblie dans un espace prétopologique. Inversement, à partir d'une relation de voisinage ou en général d'une relation binaire définie sur  $E$ , on peut construire un espace prétopologique.

## 2.1 Types d'espaces pretopologiques

En fonction de la définition de la pseudo-fermeture, l'espace prétopologique peut vérifier certaines propriétés intéressantes qui le qualifient d'un type particulier. Dans cette section, nous présenterons les différents types d'espaces prétopologiques qui ont été définis (Auray et al., 1979; Belmandt, 1993).

**Définition 2.5 (Espace prétopologique de type  $\mathcal{V}$ )** Une espace de prétopologie  $(E, a)$  est appelé espace prétopologique de type  $\mathcal{V}$  si et seulement si

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \implies (a(A) \subset a(B)) \quad (1)$$

Soit  $(E, a)$  un espace prétopologique de type  $\mathcal{V}$ , nous avons les propriétés suivantes.

**Proposition 2.6**  $\forall F_1, F_2$  sous-ensemble fermé dans  $E$  alors  $F_1 \cup F_2$  est fermé.

**Proposition 2.7**  $\forall x, y \in E, x \neq y$ , deux cas possibles :

- $F(x) \cap F(y) = \emptyset$
- $\forall z \in F(x) \cap F(y)$  alors  $F(z) \subset F(x) \cap F(y)$

**Définition 2.8 (Espace prétopologique de type  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$ )** Une espace de prétopologie  $(E, a)$  est appelé espace prétopologique de type  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$  si et seulement si :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \cup B) = a(A) \cup a(B) \quad (2)$$

Il est très simple de montrer que si  $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$  alors  $(A \subset B) \implies (a(A) \subset a(B))$ .

**Proposition 2.9** Tout espace prétopologique de  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$  est un espace prétopologique de type  $\mathcal{V}$ .

Ce dernier type d'espace prétopologique permet de calculer la pseudo-fermeture d'un sous-ensemble fini  $A$  à partir de la pseudo-fermeture de ces éléments, c'est-à-dire :

$$\forall A \in E, a(A) = \cup_{x \in A} a(\{x\}) \quad (3)$$

La notion de continuité connue de la topologie a également été définie dans un espace prétopologique.

Prétopologie temporelle

**Définition 2.10 (Continuité)** soient  $(E, a_E)$  et  $(F, a_F)$  deux espaces prétopologiques. Soit  $h$  une application de  $(E, a_E)$  vers  $(F, a_F)$ .  $h$  est dite  $(m, n)$  continue sur  $E$  si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(A), h(a_E^m(A)) \subset a_F^n(h(A)) \quad (4)$$

Si  $m = n = 1$ , on dit que  $h$  est continue sur  $E$ .

## 2.2 Construction d'une prétopologie à partir d'une relation binaire

Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire définie sur  $E$ . On note  $\mathfrak{R}(x) = \{y \in E / x\mathfrak{R}y\}$ , et on définit  $\mathfrak{R}^0(x) = \{x\}$ ,  $\mathfrak{R}^1(x) = \mathfrak{R}(x)$  et  $\forall p \geq 1$ ,  $\mathfrak{R}^p(x) = \mathfrak{R}[\mathfrak{R}^{p-1}(x)]$ . De la même manière, on note  $\mathfrak{R}^{-1}(x) = \{y \in E / y\mathfrak{R}x\}$  et  $\forall p \geq 1$ ,  $\mathfrak{R}^{-p}(x) = \mathfrak{R}[\mathfrak{R}^{-p+1}(x)]$ . Nous avons donc,  $\forall A \subset E$ ,  $\mathfrak{R}(A) = \cup_{x \in A} \mathfrak{R}(x)$ . À partir de la relation binaire  $\mathfrak{R}$  nous pouvons définir trois espaces prétopologiques (Emptoz, 1983; Belmandt, 1993). On distingue 3 exemples d'espaces prétopologiques :

**Prétopologie des ascendants d'ordre p** Désigne la structure prétopologique sur  $E$  avec la pseudo-fermeture  $ad^p$  définie comme suit :

$$\forall A \in E, ad^p(A) = \{x \in E / \exists i, 0 \leq i \leq p, \mathfrak{R}^{-i}(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad (5)$$

**Prétopologie des descendants d'ordre q** Désigne la structure prétopologique sur  $E$  avec la pseudo-fermeture  $ad^q$  définie comme suit :

$$\forall A \in E, ad^q(A) = \{x \in E / \exists j, 0 \leq j \leq q, \mathfrak{R}^j(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad (6)$$

**Prétopologie des ascendants-descendants d'ordre (p, q)** Désigne la structure prétopologique sur  $E$  avec la pseudo-fermeture  $ad^{p,q}$  définie comme suit :  $\forall A \in E$ ,

$$ad^{p,q}(A) = \{x \in E / \exists (i, j), 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q, \mathfrak{R}^{-i}(x) \cap A \neq \emptyset \text{ and } \mathfrak{R}^j(x) \cap A \neq \emptyset\} \quad (7)$$

**Proposition 2.11** Les espaces prétopologiques des ascendants d'ordre  $p$ , des descendants d'ordre  $q$  et des ascendants-descendants d'ordre  $(p, q)$  sont des espaces de type  $\mathcal{V}_D$ .

## 3 Modèle prétopologique temporel : nouveau concept

La fonction de continuité permet d'établir un transport des structures prétopologiques d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . Ce transport peut être défini pour étudier des sous-ensembles de structures évoluant dans le temps.

Dans cette section, nous introduirons une nouvelle notion d'espace prétopologique temporel pour étudier des sous-structures et la relation entre les éléments de ses sous-structures qui évoluent dans une dimension temporelle  $T = \{1, \dots, n\}$ . Cette notion nous permettra d'établir un formalisme générique. Nous présenterons un exemple de prétopologie temporelle construite à partir d'une relation binaire. Nous donnerons deux exemples intéressants de sous-structures évoluant dans le temps. L'ensemble  $E$  d'éléments reste le même mais la pseudo-fermeture  $a_t$  peut évoluer. Ce formalisme est basé sur la définition d'une fonction temporelle  $f_t$  qui doit respecter la contrainte de continuité entre les espaces  $(E, a_t)$  et  $(E, a_{t+1})$ .

**Définition 3.1 (Fonction temporelle)**  $f_t$  est une fonction temporelle entre les estampilles temporelles  $t$  et  $t + 1$  définie sur  $\mathcal{P}(E)$  si  $f_t$  respecte la condition de continuité entre  $(E, a_t)$  et  $(E, a_{t+1})$ . i.e.  $\forall A \in \mathcal{P}(A), f_t$  vérifie  $f_t(a_t(A)) \subset a_{t+1}(f_t(A))$ .

**Définition 3.2 (Espace Prétopologique temporel)** Un espace prétopologique temporel dans une estampille temporelle  $T = \{1, \dots, n\}$  est une séquence d'espaces prétopologiques  $\langle (E_1, a_1), \dots, (E_n, a_n) \rangle$  avec une fonction temporelle  $f_t$  entre  $E_t$  et  $E_{t+1}$ .

### 3.1 Construction d'une prétopologie temporelle

Soit  $G$  un espace prétopologique temporel (c'est-à-dire une séquence de prétopologies)  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  où  $G_i = (E, a_i)$ . Nous pouvons alors construire une prétopologie temporelle des descendants d'ordre  $p$  à partir d'une séquence de prétopologies  $(E, a_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Définition 3.3 (Fonction temporelle des descendants)** Nous appelons fonction temporelle des descendants  $\mathfrak{R}_t$  définie par :

$$\forall x \in E, \mathfrak{R}_t(\{x\}) = \{y \in E / y \in a_{t+1}(x)\} \tag{8}$$

On désigne par  $\mathfrak{R}_t^0(x) = \{x\}, \mathfrak{R}_t^1(x) = \mathfrak{R}_t(x)$ , et  $\forall p \geq 1, \mathfrak{R}_t^p(x) = \mathfrak{R}_t[\mathfrak{R}_t^{p-1}(x)]$ . Nous généralisons cette fonction à :  $\forall A \subset E, \mathfrak{R}_t(A) = \cup_{x \in A} \mathfrak{R}_t(x)$ .

**Définition 3.4** L'espace prétopologique temporel des descendants d'ordre  $p$  est  $(E, ad_t^p)$  dont la pseudo-fermeture est définie par :

$$\forall A \in E, ad_t^p(A) = \{x \in E / \exists i, 0 \leq i \leq p, \mathfrak{R}_t^i(x) \cap A \neq \emptyset\}. \tag{9}$$

$ad_t^p$  est appelé pseudo-fermeture temporelle des descendants d'ordre  $p$ .

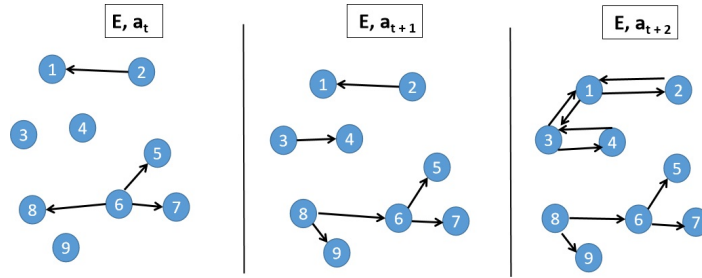


FIG. 1 – Exemple de prétopologie temporelle

La figure 1 présente un exemple d'espace prétopologique temporel  $G_1 = (E, a_1), G_2 = (E, a_2), G_3 = (E, a_3)$  où  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Dans cette figure, les individus sont les noeuds, un arc  $u \rightarrow v$  veut dire que  $v \in ad(\{u\})$ . La table 1 fournit la fonction temporelle des descendants  $\mathfrak{R}_t$  et  $\mathfrak{R}_{t+1}$  entre  $t, t + 1$  et  $t + 1, t + 2$ . La figure 2 montre l'application successive de  $\mathfrak{R}_t$  sur  $E$  entre  $t, t + 1$  et  $t + 2$  pour les éléments 2 et 6. Le but de la fonction temporelle est de permettre à la pseudo-fermeture de s'étendre temporellement jusqu'à sa fermeture tout en gardant les propriétés de la structure prétopologique.

TAB. 1 – Fonction temporelle  $\mathfrak{R}_t$  entre  $t$  et  $t + 1$

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathfrak{R}_t^1(x)$	{1}	{1, 2}	{3, 4}	{4}	{5}	{5, 6, 7}	{7}	{8, 6, 9}	{9}
$\mathfrak{R}_{t+1}^1(x)$	{1, 2, 3}	{1, 2}	{1, 3, 4}	{3, 4}	{5}	{5, 6, 7}	{7}	{8, 6, 9}	{9}

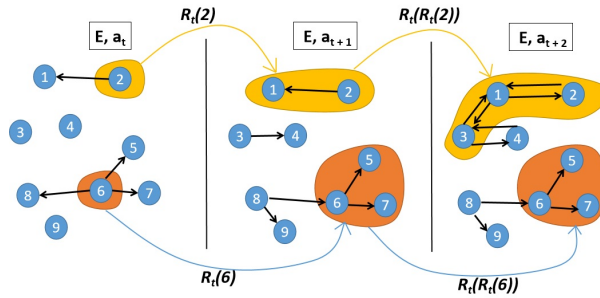


FIG. 2 – Pseudo-fermeture temporelle des descendants d'ordre  $p = 1, 2$

## 4 Définition de nouvelles sous-structures évoluant dans le temps

Dans certains domaines d'application, comme en économie, il est intéressant d'analyser les dépendances intersectorielles comme les influences sectorielles qui évoluent dans le temps ou qui restent stables pendant une période. Cela permet aux économistes d'établir des prédictions de dépendances de secteurs économiques stables ou changeantes.

Dans cette partie, nous allons définir deux nouvelles notions de sous-structures temporelles :

1. Séquence d'un sous-ensemble fermé élémentaire qui montre l'évolution de l'influence d'un élément particulier sur ses descendants d'ordre  $p$ .
2. Sous-ensemble de descendants d'ordre  $p$  d'un élément qui est stable sur une période de temps fixe  $k$  que nous appellerons sous-structure  $k$ -stable.

Dans cette section,  $(E, ad_t^p)$  est l'espace prétopologique temporel des descendants d'ordre  $p$  où  $t \in T = \{1, \dots, n\}$ .

### 4.1 Évolution d'une sous-structure fermé élémentaire

Dans le cadre de l'analyse structurelle, des sous-ensembles fermés ont souvent été étudiés dans un espace ayant une structure prétopologique. De plus, ils ont été utilisés pour construire des clusters ou des modèles de classification supervisée. Nous allons étendre la définition de fermé temporel attaché à un élément de l'ensemble étudié et nous donnerons un algorithme pour rechercher ces sous-ensembles.

**Définition 4.1 (Évolution temporelle d'une sous-structure fermée élémentaire)**  $\forall x \in E$ , nous définissons l'évolution temporelle d'une sous-structure fermé élémentaire de  $x$  comme

une séquence de la sous-structure fermé élémentaire de  $x$  évoluant dans le temps, c'est-à-dire  $(F_1(x), \dots, F_{t_n}(x))$ .

$F_t$  est construit itérativement à chaque temps  $t$  en appliquant une pseudo-fermeture temporelle. La figure 3 montre la construction d'une séquence d'un sous-ensemble fermé élémentaire de  $x = 8$  par l'algorithme 1.

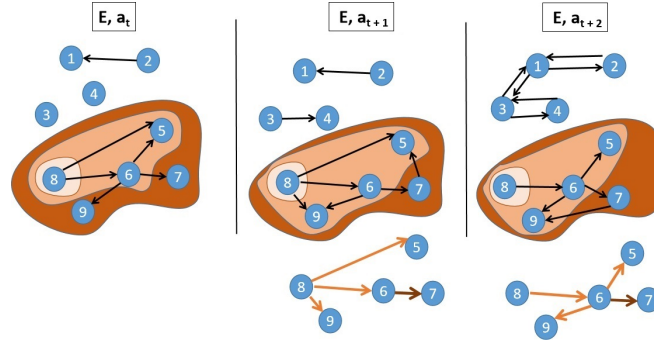


FIG. 3 – Exemple de séquence de fermés élémentaires temporels de  $x = 8$

---

**Algorithm 1** Sous-ensemble fermé élémentaire temporelle

---

**Input :**

- $\{(E, a_{t_1}), (E, a_{t_2}), \dots, (E, a_{t_n})\}$  séquence de  $n$  espaces prétopologiques
- $x$  an element

```

1:  $G^p = [ ]$ 
2:  $i = 0$ 
3: for chaque espace prétopologique do
4:   if premier espace then
5:     Closure =  $\mathfrak{R}_{t_i}^p(x) \cap a_{t_i}^p(x)$ 
6:   else
7:     for  $j : 1$  to  $p-1$  do
8:       Closure =  $\mathfrak{R}_{t_i}^p(x) \cap a_{t_i}^j(x)$ 
9:     end for
10:  end if
11:   $i = i+1$ 
12: end for
13: return  $G^p$ 

```

---

## 4.2 Sous-structure k-stable

Une sous-structure k-stable peut être construite successivement à partir de la sous-structure 2-stable.



**Définition 4.2 (Sous-structure 2-stable)** On dit que  $A \subset E$  est une sous-structure 2-stable entre deux temps  $t$  et  $t + 1$  si et seulement si  $\exists B \subset E$ , tel que  $A = ad_t(B) = f_t(B)$

**Définition 4.3 (Sous-structure k-stable)** Soit  $k \geq 1$ ,  $A \subset E$  est k-stable si  $\exists t \in T$ , tel que,  $A$  est 2-stable entre  $t$  et  $t + 1$ ,  $t + 1$  et  $t + 2$ , ...,  $t + k - 1$  et  $t + k$ .

**Définition 4.4 (Sous-structure maximale k-stable)** Soit  $k \geq 1$ ,  $A \subset E$  est maximal k-stable si et seulement si  $\nexists B \subset E$  sous-structure k-stable tel que  $A \subset B$ .

Ces sous-structures peuvent être construites de manière itérative par pseudo-fermeture et intersections successives d'un élément  $x \in E$ . La figure 2 montre 2 exemples  $\{1, 2\}$  and  $\{5, 6, 7\}$  de sous-structures 3-stables; et  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$  est une structure maximale 2-stable.

---

**Algorithm 2** Sous-structure temporelle k-stable

---

**Input :**

-  $\{(E, a_{t_1}), (E, a_{t_2}), \dots, (E, a_{t_n})\}$  séquence de  $n$  espaces prétopologiques  
 -  $x$  un élément

```

1:  $G^p = [ ]$ 
2:  $i = 0$ 
3: for chaque espace pretopologique  $V$  do
4:   if premier espace then
5:      $G^p(i) = \mathfrak{R}_{t_i}^p(x) \cap a_{t_i}^p(x)$  // recherche de sous-ensembles 2-stables entre  $E, a_{t_i}$  et
        $E, a_{t_{i+1}}$ 
6:   else
7:      $G^p(i) = \text{Find 2-stable subset between } G^p(i - 1) \text{ and } E, a_{t_i}$ 
8:   end if
9:    $i = i + 1$ 
10: end for
11: return  $G^p$ 
    
```

---

## 5 Résultats expérimentaux

Les expérimentations ont été menées sur plusieurs ensembles de données : 2 jeux de données provenant de la plate-forme d'analyse du réseau de Stanford<sup>1</sup> (SNAP) et 2 jeux de données réelles traitant de l'influence intersectorielle en économie de Nouvelle Calédonie (jeu de données 1) et de France (jeu de données 2). Le tableau 2 donne une brève description des ensembles de données.

**COLLEGEMSG**<sup>2</sup> jeu de données constitué de messages privés envoyés sur un réseau social en ligne de l'université de Californie. Un arc  $u \rightarrow v$  signifie que l'utilisateur  $u$  a envoyé un message privé à l'utilisateur  $v$ .

---

1. <https://snap.stanford.edu/snap/>  
 2. <https://snap.stanford.edu/data/CollegeMsg.html>

TAB. 2 – Description des Données

	Nb instances	Temporalité	Nb estampilles
<b>Données économique 1</b>	204	année	17
<b>Données économique 2</b>	1139	année	67
<b>College message</b>	1899	mois	9
<b>Email-UE</b>	986	jours	12

**EMAIL-EU**<sup>3</sup> est un ensemble de courriers électroniques entre les membres d’une institution de recherche européenne. Un arc ( $u \rightarrow v$ ) signifie que la personne  $u$  a envoyé un courriel à  $v$ . La figure 4 montre l’évolution temporelle à partir d’un individu pour les deux ensembles de données. L’algorithme met en évidence l’évolution des interactions entre un groupe de personnes. Nous pouvons voir que la personne 3 de l’ensemble de données COLLEGEMSG interagit indirectement avec la personne 155 et plus directement dans les temps d’après. De même pour l’individu 194 avec l’individu 311 de l’ensemble de données EMAIL-EU.

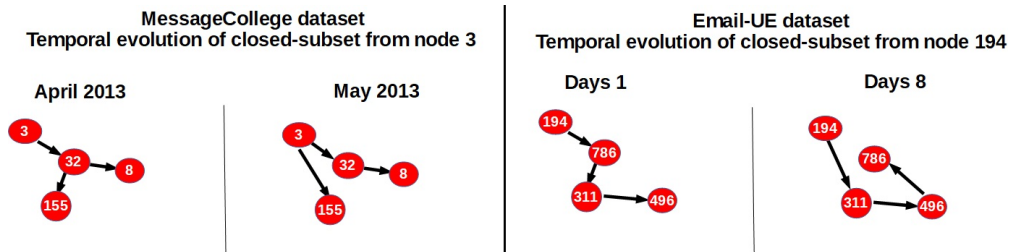


FIG. 4 – Exemples de fermés élémentaires temporels

**Résultats de l’activité économique** L’activité économique d’un pays est schématisée par différents flux monétaires qui se réalisent sur une période annuelle. Les pays européens, afin de représenter l’état de leurs comptes nationaux, utilisent des tableaux entrées-sorties (I-O) présentant ces flux monétaires. L’analyse des entrées-sorties (I-O) est utilisée pour modéliser l’interdépendance sectorielle. Les entrées et les sorties sont les produits consommés et vendus, en valeur monétaire, par secteurs. Une industrie utilise fréquemment des intrants qui sont produits par d’autres industries. De même, les produits de cette industrie peuvent servir d’"intrants" à d’autres industries de l’économie. Un exemple particulièrement simple, donné par (Leontief, 1986), explique comment construire un tableau I/O.

La prétopologie a été utilisée pour la première fois en économie pour analyser les dépendances intersectorielles (Auray et al., 1979; Belmandt, 1993). L’analyse structurelle a été réalisée à l’aide du tableau d’entrées-sorties  $T(n, n)$ . Un problème important en économie est de mesurer les impacts de la variation de la production d’un secteur  $k$  directement sur d’autres secteurs, ou indirectement. La prétopologie des descendants a permis de modéliser ces liens

3. <https://snap.stanford.edu/data/email-Eu-core.html>

## Prétopologie temporelle

que l'on peut représenter par un graphe orienté où les arcs représentent l'influence d'un secteur sur un autre (cf. figure 5). L'influence est retenue si les dépenses intermédiaires d'un secteur sur un autre est supérieure à un seuil donné. L'étude a été réalisée sur les *Données économiques I* associé aux années 1999 à 2015 et sur les *Données économiques 2* de 1949 à 2016.

Le tableau  $T(n, n)$  d'éléments  $x_{jk}$  représente le montant des ventes de produits du secteur  $j$  au secteur  $k$  en valeur monétaire. A partir de  $T$ , on construit le tableau  $A(n, n)$  de terme générale  $a_{jk} = \frac{x_{jk}}{X_k}$  avec  $X_k = \sum_{j=1}^n x_{jk}$  la somme des ventes d'un secteur  $k$  sur l'ensemble des secteurs. Dans ce travail, nous utiliserons l'influence dite directe dont le seuil d'influence  $s$  sera défini par secteur avec  $s_k = \frac{\sum_{j=1}^n a_{jk}}{n}$  la valeur moyenne des influences que chaque secteur subit de la part des autres secteurs. Ainsi à partir de la matrice  $A(n, n)$ , un seuil par secteur est créé et permet de définir la valeur au-delà de laquelle le secteur  $j$  succède au secteur  $k$  si  $a_{jk} > s_k$ ; cela signifie que  $j$  est influencé par  $k$  (cf. figure 5). Différents seuils d'influence ont été testés, par manque de place, nous présenterons les résultats interprétés par un expert pour ce seuil moyen.

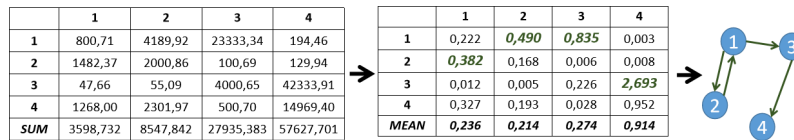


FIG. 5 – Exemple de tableat  $T$ ,  $A$  et sa prétopologie des descendants

Selon nos experts économistes, la méthode proposée permet de mettre en évidence l'évolution des données économiques 1 marquée par le développement d'une industrie de transformation locale au cours des deux dernières décennies. La figure 6 montre des exemples de sous-structures  $k$ -stables maximales à partir de 3 secteurs différents. Le secteur 2 (Industries agro-alimentaires) a une influence sur les secteurs 11 (Services rendus principalement aux ménages), 12 (administration), 10 (Services rendus principalement aux entreprises) et 4 (Industries diverses) de 1999 à 2015. Il y a une influence stable de certains secteurs sur d'autres. On remarque également que le secteur 4 est influencé indirectement par les 3 secteurs de l'exemple de la figure 6. La figure 7 montre, à partir du jeu de données économiques 2, l'évolution struc-

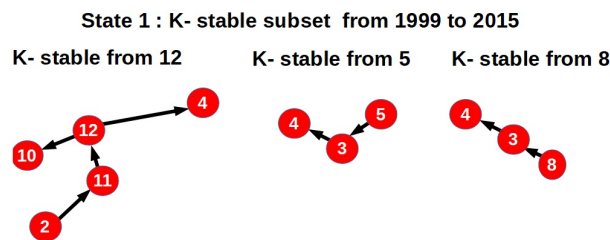


FIG. 6 – Exemples de  $k$ -stable maximaux

tuelle des interdépendances. A partir du secteur 2, nous obtenons, des secteurs influencés

directement par ce dernier ou indirectement. La structure évolue, les influences changent dans le temps. Cette sous-structure met en évidence le changement d’impact direct ou indirect du secteur 2 sur le secteur 9.

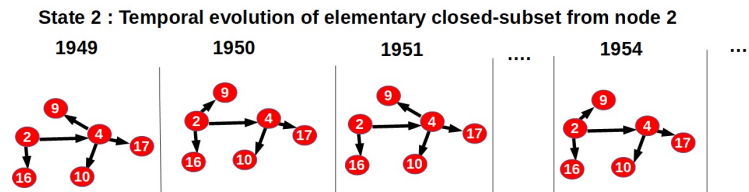


FIG. 7 – Exemple de fermé élémentaire temporel du secteur 2

## 6 Conclusion and perspectives

Nous avons établi une première formulation de la notion d’espace prétopologique temporel. A partir d’un exemple de relation temporelle, nous avons défini l’espace temporel prétopologique des descendants d’ordre  $p$ . Nous avons donné deux nouvelles notions de sous-structures temporelles, construites par pseudo-fermeture temporelle, qui peuvent être extraites pour analyser les données d’un point de vue structurel.

Ce travail présente de nombreuses perspectives. La première consiste à optimiser les deux algorithmes. Il serait également intéressant d’étudier les propriétés de ces espaces prétopologiques. Enfin, le but est de combiner l’analyse structurelle au niveau des influences des individus étudiés et les caractéristiques décrivant ces individus qui peuvent également changer dans le temps. Une exploration des sous-structures combinée à l’extraction des motifs (notamment les itemsets) amènerait à une analyse croisée. Dans l’exemple des données économiques, un point important pour les économistes est l’impact du seuil d’influences entre secteurs. Il serait intéressant de définir des structures prétopologiques temporelles avec des influences pondérées au lieu de ne garder que les influences importantes (au delà d’un seuil).

Dans cette étude, la prétopologie temporelle est appréhendée avec un exemple de relation binaire. Une autre perspective intéressante serait de définir d’autres critères permettant de rechercher des sous-structures dans des données issues d’une famille de relations binaires.

## Références

- Arnaud, G., M. Lamure, M. Terrenoire, et D. Tounissoux (1986). Analysis of the connectivity of an object in a binary image : a pretopological approach. In *Proc. of the 8th IAPR Conference*.
- Auray, J.-P., G. Duru, et M. Mougeot (1979). A pre-topological analysis of the input-output model. *Economics Letters* 2(4), 343–347.
- Basileu, C., S. B. Amor, M. Bui, et M. Lamure (2012). Prétopologie stochastique et réseaux complexes. *Stud. Inform. Univ.* 10(2), 73–138.

## Prétopologie temporelle

- Belmandt, Z. (1993). *Manuel de prétopologie et ses applications : sciences humaines et sociales, réseaux, jeux, reconnaissance des formes, processus et modèles, classification, imagerie, mathématiques*. Interdisciplinarité et nouveaux outils. Hermès.
- Bui, Q. V. (2018). *Pretopology and Topic Modeling for Complex Systems Analysis : Application on Document Classification and Complex Network Analysis*. Ph. D. thesis.
- Cleuziou, G., D. Buscaldi, V. Levorato, et G. Dias (2011). A pretopological framework for the automatic construction of lexical-semantic structures from texts. In *Proceedings of the 20th ACM international conference on Information and knowledge management*, pp. 2453–2456.
- Dalud-Vincent, M., M. Brissaud, et M. Lamure (2001). Pretopology as an extension of graph theory : the case of strong connectivity. *Journal of Applied Mathematics* 5(4), 455–472.
- Duru, G. (1980). *Contribution à l'étude des structures des systèmes complexes dans les sciences humaines*. Ph. D. thesis.
- Emptoz, H. (1983). *Modèle prétopologique pour la reconnaissance des formes application en neurophysiologie*. Ph. D. thesis, INSA DE LYON.
- Lamure, M. (1987). *Espaces abstraits et reconnaissance de formes. Application au traitement des images digitales*. Ph. D. thesis, Univ. Claude Bernard Lyon 1.
- Largerou, C. et S. Bonnevey (2002). A pretopological approach for structural analysis. *Information Sciences* 144(1-4), 169–185.
- Le, T., N. Kabachi, et M. Lamure (2007). A clustering method associated pretopological concepts and k-means algorithm. In *Recent advances in stochastic modeling and data analysis*, pp. 529–536. World Scientific.
- Leontief, W. (1986). *Input-output economics*. Oxford University Press.
- Levorato, V. (2011). Modeling groups in social networks.
- Selmaoui, N., C. Leschi, et H. Emptoz (1993). Crest lines detection in grey level images : Studies of different approaches and proposition of a new one. In *CAIP'93*, Volume LNCS 719, pp. 157–164.

## Summary

Pretopology is a mathematical model developed from a weakening of the topological axiomatics. It was initially used in economic, social, physical and biological sciences, and next in pattern recognition and image analysis. It allows to work in a mathematical framework with weak properties, and its non idempotent operators called pseudo-closure permit to implement iterative algorithms. It proposes a formalism that generalizes graph theory concepts and models problems universally. In this paper, we will extend this model to analyze complex data with spatio-temporal dimensions. We define the notion of a temporal pretopological space based on a temporal function. We give an example of temporal function based on binary relationship and we construct a temporal pretopological space called p-order descendants. We present a two new notions of temporal sub-structures which present the sub-structure evolution over time. We propose algorithms to search this sub-structures. We experiment our proposition on 4 real datasets.